Title	第5回COE研究員連続講演会：『逆散乱法』入門
Author(s)	Watanabe, Michiyuki
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 97, 3-40
Issue Date	2005-01-01
DOI	10.14943/624
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/682; http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/1053/
Type	bulletin (article)
File Information	tech97.pdf

21世紀ＣＯＥプログラム：

特異性から見た非線形構造の数学

第５回ＣＯＥ研究員連続講演会
『逆散乱法』入門

COE 研究員

渡辺　道之

2004.12.13（月），12.14（火），12.15（水）

Series ＃97. July, 2005

Publication of this series is partly supported by Grant-in-Aid for formation of COE.
‘Mathematics of Nonlinear Structures via Singularities’（Hokkaido University）
URL:http://coe.math.sci.hokudai.ac.jp

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#70 T. Nakazi (Ed.), 第 10 回 関数空間セミナー報告集, 97 pages. 2002.

#71 Y. Giga (Ed.), Surface Evolution Equations - a level set method, 223 pages. 2002.

#72 T. Suwa and T. Yamanouchi (Eds.), 2001 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 44 pages. 2002.

#73 T. Jimbo, T. Nakazi and M. Hayashi (Eds.), 第 11 回 関数空間セミナー報告集，135 pages. 2003.

#74 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo and G. Nakamura (Eds.), Partial Differential Equations, 51 pages. 2002.

#75 D. Matsushita (Ed.), Proceedings of the workship "Hodge Theory and Algebraic Geometry", 191 pages. 2003.

#76 M. Hayashi and G. Ishikawa (Eds.), 2002 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 34 pages. 2003.

#77 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, K. Tsutaya, Y. Tonegawa and G. Nakamura(Eds.), Proceedings of the 28th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 76 pages. 2003.

#78 S. Izumiya, G. Ishikawa, T. Sano and I. Shimada (Eds.), The 12th MSJ-IRI "Singularity Theory and Its Applications" ABSTRACTS, 291 pages. 2003.

#79 H. Kubo and T. Ozawa (Eds.), Proceedings of Sapporo Guest House Symposium on Mathematics 15 "Evolution Equations", 31 pages. 2003.

#80 S. Miyajima, F. Takeo and T. Nakazi (Eds.), 第 12 回関数空間セミナー報告集, 122 pages. 2004.

#81 Y. Giga, S. Izumiya and K. Deguchi (Eds.), Mathematical Aspects of Image Processing and Computer Vision 2003, 48 pages. 2004.

#82 I. Shimada and Y. Tonegawa (Eds.), 2003 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 52 pages. 2004.

#83 The 2nd HU and SNU Symposium on Mathematics Abstracts, 22 pages. 2004.

#84 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa and K. Tsutaya (Eds.), Proceedings of the 29th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 77 pages. 2004.

#85 T. Ozawa and Y. Tsutsumi (Eds.), Lectures on nonlinear dispersive equations I, 147 pages. 2004.

#86 T. Ozawa and Y. Tsutsumi (Eds.), Lectures on nonlinear dispersive equations II, 47 pages. 2004.

#87 T. Ozawa and Y. Tsutsumi (Eds.), COE Symposium Nonlinear Dispersive Equations, 85 pages. 2004.

#88 T. Namiki, M. Hatakeyama, S. Tadokoro and H. Aoi (Eds.), 北海道大学数学教室におけるメタデータ交換プロトコル OAI-PMH に準拠した e-print サーバ構築, 14 pages. 2004.

#89 S. Izumiya (Ed.) M. Takahashi, T. Miyao, G. Okuyama, Y. Nakano and K. Inui, 第 1 回数学総合若手研究集会　COE Conference for Young Researchers, 143 pages. 2005.

#90 J. Saal, 1st COE Lecture Series H^{∞}-calculus for the Stokes operator on L_q-spaces, 34 pages. 2005.

#91 S. Miyajima, F. Takeo and T. Nakazi (Eds.), 第 13 回関数空間セミナー報告集, 111 pages. 2005.

#92 N. Umeda, 第 4 回ＣＯＥ研究員連続講演会　反応－拡散方程式の大域解と爆発解について, 8 pages. 2005.

#93 K. Arima, 第 2 回ＣＯＥ研究員連続講演会　極小モデルプログラムの入門およびその正標数への拡張, 25 pages. 2005.

#94 Y. Nakano, 学位論文 Doctoral thesis "OPTIMAL HEDGING IN THE PRESENCE OF SHORTFALL RISK" 43 pages. 2005.

#95 Keiji Matsumoto and Masao Jinzenji (Eds.), 2004 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 17 pages. 2005.

#96 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa and K. Tsutaya (Eds.), Proceedings of the 30th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 83 pages. 2005.

21 世紀 COE プログラム:
特異性から見た非線形構造の数学

第 5 回 COE 研究員連続講演会
『逆散乱法』入門

COE 研究員
渡辺 道之

2004.12.13(月), 12.14(火), 12.15(水)

北海道大学理学部 4 号館 508 室

『逆散乱法』入門

渡辺道之

目次

第 1 章

可積分方程式

- 可積分：厳密に解ける方程式のことであり，ソリトン方程式の場合のように「逆散乱法」によって定式化できて，解析的な厳密解を得ることが出来るものを言う．古典的には「求積法」によって解ける方程式のことを言う．一般的な定義はないようである．
- 逆散乱法：非線形（発展）方程式を解析的に厳密に解く方法である．
- 孤立波：ただひとつの山をもつ波形が壊れずに進む波．
- ソリトン[*1]：次の性質をもつ非線形波動である．
  1. 孤立波の性質：空間的に局在した波が，その性質（速さや形など）を変えずに伝播する．
  2. 粒子的性質：孤立波は互いの衝突に対して安定であり，おのおのの個別性を保持する．

以下，逆散乱法により解くことのできる偏微分方程式（可積分方程式）の例をいくつか紹介する（Ablowitz-Clarkson [2, pp.49-69, Chapter 5], 川原琢治 [34, pp.45-47] 参照）．

(1) Korteweg-de Vries equation (Gardner, Greene, Kruskal and Miura [26])

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

(2) Modified Korteweg-de Vries equation (Wadati [67])

$$u_t - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0.$$

(3) その他，三階の微分項を含む方程式:

[*1] 現代物理学では，光子（photon），音子（phonon），励起子（exciton）のように，粒子的性質を示す接尾語として-on を用いる．Zabusky と Kruskal は，粒子的性質をもった孤立波という意味で，ソリトン（soliton）と名づけた．

(a) (Calogero and Degasperis [12]; Fokas [20])

$$u_t + u_{xxx} - \frac{1}{8}u_x^3 + u_x(ae^u + be^{-u} + c) = 0.$$

(b) (Svinolupov and Sokolov [63] ; Svinolupov, Sokolov and Yamilov [64])

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}\frac{u_x u_{xx}^2}{1+u_x^2} - \frac{3}{2}\mathcal{P}(u)(u_x^2+1)u_x + \gamma u_x,$$
$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}u_{xx}^2 u_x^{-1} + \alpha u_x^{-1} - \frac{3}{2}\mathcal{P}(u)u_x^2 + \gamma u_x,$$

ここで, α, β, γ は任意の定数であり, $\mathcal{P}(u; g_2, g_3)$ は Weierstrass elliptic function である.

(c) Cylindrical Korteweg-de Vries equation (Calogero and Degasperis [11])

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \frac{1}{2t}u = 0.$$

(4) 三階の微分項を持つ連立偏微分方程式

(i) (Hirota and Satsuma [29])

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x - 6vv_x = 0,$$
$$v_t - 2v_{xxx} - 6uv_x = 0.$$

(ii) (Ito [31]);

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x + 2vv_x = 0$$
$$v_t + 2(uv)_x = 0.$$

(iii) A model for dispersive water waves (Kaup [35]; Kuperschmidt [40, 41]; Antonowicz and Fordy [7, 8])

$$u_t + (u_{xx} - 3vu_x + 3uv^2 - 3u^2)_x = 0,$$
$$v_t + (v_{xx} + 3vv_x + 3v^3 - 6uv)_x = 0.$$

(iv) (Drinfel'd and Sokolov [16]; Wilson [69])

$$u_t + 3vv_x = 0,$$
$$v_t + 2v_{xxx} + 2uv_x + u_x v = 0.$$

(5) Klein-Gordon equations:

(i) The Sine-Gordon equation (Ablowitz, Kaup, Newell and Segur [5])

$$u_{xt} = \sin u.$$

(ii) (Mikhailov [50, 51]; Fordy and Gibbons [24])

$$u_{xt} = e^{2u} - e^{-u}.$$

(iii) (Fordy and Gibbons [24])

$$u_{xt} = e^{2u} - e^{-u}\cosh v,$$
$$v_{xt} = 3e^{-u}\sinh v.$$

(iv) (Fordy and Gibbons [24])

$$\theta_{xt} = e^{\theta}\cosh\phi - e^{-\theta}\cosh\psi,$$
$$\phi_{xt} = e^{\theta}\sinh\phi,$$
$$\psi_{xt} = e^{-\theta}\sinh\psi.$$

(v) (Pohlmeyer [56]; Lund and Regge [46])

$$u_{xx} - u_{tt} \pm \sin u\cos u + (u_x^2 - v_t^2)\cot u\,\mathrm{cosec}^2\, u = 0,$$
$$v_{xx} - v_{tt} = 4(u_x v_x - u_t v_t)\,\mathrm{cosec}\, 2u.$$

(6) その他の連立方程式

(i) The Reduced Maxwell-Bloch equations (Gibbon, Caudrey, Bullough and Eilbeck [28])

$$E_t - v = 0,$$
$$v_x - \omega r - Eq = 0,$$
$$q_x + Ev = 0,$$
$$r_x + \omega v = 0,$$

ここで，ω は定数.

(ii) The self-induced-transparency (SIT) equations (Eilbeck, Gibbon, Caudrey an Bullough [18]; Lamb [43]; Ablowitz, Kaup and Newell [4])

$$E_t + E_x = < p > = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,t,\alpha)g(\alpha)d\alpha,$$
$$p_t + 2i\alpha p = E\eta,$$
$$\eta_t = -\frac{1}{2}(Ep^* + E^*p).$$

ここで，$g(\alpha)$ は probability density である（もし，$g(\alpha) = \delta(\alpha - \alpha_0)$，ならば SIT 方程式は Sine-Gordon 方程式に帰着される—Ablowitz and Segur [6, p.322] を見よ）.

(7) "Boussinesq" system:

(i) The Boussinesq (1871) 方程式 (Zakharov [71]; Ablowitz and Haberman [3])

$$u_{tt} - u_{xx} + (u^2)_{xx} \pm u_{xxxx} = 0.$$

(ii) Modified Boussinesq 方程式 (Quispel, Nijhoff and Capel [57])

$$3u_{tt} - 6u_t u_{xx} - 6u_x^2 u_{xx} + u_{xxxx} = 0.$$

(iii) (Kaup [36]; Kuperschmidt [40, 41]; Antonowicz and Fordy [7, 8])

$$u_t + (uv)_x + v_{xxx} = 0,$$

$$v_t + u_x + vv_x = 0.$$

(8) 五階の方程式:

(i) (Sawada and Kotera [60]; Caudrey, Dodd and Gibbon [13])

$$u_t + u_{xxxxx} + 10u_x u_{xx} + 10uu_{xxx} + 20u^2 u_x = 0.$$

(ii) (Kaup [37])

$$u_t + u_{xxxxx} + 10u_x u_{xx} + 25uu_{xxx} + 20u^2 u_x = 0.$$

(9) Nonlinear Schrödinger-like equations:

(i) (Zakharov and Shabat [75])

$$iu_t + u_{xx} \pm 2|u|^2 u = 0.$$

(ii) "Cylindrical" nonlinear Schrödinger equation (Leclert, Karney, Bers and Kaup [45])

$$iu_t + \frac{i}{2t} + u_{xx} \pm 2|u|^2 u = 0.$$

(iii) Derivative nonlinear Schrödinger equation (Kaup and Newell [38])

$$iu_t + u_{xx} \pm 2i(|u|^2 u)_x = 0.$$

(iv) Landau-Lifshitz equation (Sklyanin [62]; Mikhailov [52]; Rodin [58, 59])

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xx} + \mathbf{S} \wedge \mathbf{J}\mathbf{S}$$

ここで，$\mathbf{J} = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$，ただし $J_1 < J_2 < J_3$ であり，また，$\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$，$|\mathbf{S}|^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$ である．．特に，$\mathbf{J} = 0$ の場合は Heisenberg Ferromagnet equation

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xx}$$

となる (Lakshmanan [42]; Takhtajan [65]).

(v) Coupled Schrödinger equation (Manakov [48]; Zakharov and Schulman [74])

$$iu_t + u_{xx} + 2(|u|^2 \pm |v|^2)u = 0$$
$$iv_t \pm v_{xx} + 2(|v|^2 \pm |u|^2)v = 0.$$

(vi) Vector nonlinear Schrödinger equation (Zakharov and Manakov [73]; Zakharov and Schulman [74] ; Fordy and Kulish [25])

$$i\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}_{xx} \pm 2|\boldsymbol{u}|^2\boldsymbol{u} = 0,$$

$\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_n)$

(vii) Vector derivative nonliear Schrödinger equation (Fordy [23])

$$i\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}_{xx} \pm 2i(|\boldsymbol{u}|^2\boldsymbol{u})_x = 0,$$

ここで, $\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_n)$.

(viii) Long-short-wave interaction system (Langmuir waves) (Yajima and Oikawa [70])

$$iu_t + u_{xx} - uv = 0$$
$$v_t + v_x + (|u|^2)_x = 0.$$

(ix) (Newell [54])

$$iu_t + u_{xx} - 2\kappa|u|^2u + iuv_x + uv^2 = 0$$
$$v_t - 2\kappa(|u|^2)_x = 0.$$

(10) The so called Harry-Dym equation (Kruskal [39]; Wadati, Konno and Ichikawa [68])

$$u_t = 2(u^{-1/2})_{xxx}.$$

(11) Two highly nonlinear equation (Wadati, Konno and Ichikawa [68])

$$u_t + \left[u_x(1+u^2)^{-3/2}\right]_{xx} = 0$$
$$iu_t + \left[\frac{u}{(1+|u|^2)^{1/2}}\right]_{xx} = 0$$

(12) The three-wave interaction equation（3 波共鳴相互作用方程式）(Zakharov and Manakov [73]; Ablowitz and Haberman [3]; Kaup [36])

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = b_1 u_2^* u_3$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + a_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = b_2 u_3 u_1^*$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + a_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} = b_3 u_1 u_2$$

ここで，a_i, b_i, $i = 1, 2, 3$ は定数である.

(13) Benjamini-Ono（ベンジャミン-小野）方程式 (Benjamin [9, 10]; Davis-Acrivos [15]; Ono [55])

$$u_t + uu_x + \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{yy}}{x-y}\, dy = 0$$

第 3 項はヒルベルト変換である.

(14) Kadomtsev-Petviashvili（カドムツェフ-ペトビアシビリ）方程式

(i) KPI (Manakov [49]; Segur [61]; Fokas and Ablowitz [21, 22])

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x = 3u_{yy}.$$

(ii) KPII (Ablowitz, BarYaacov and Fokas [1])

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x = -3u_{yy}.$$

(15) Davey-Stewartson 方程式

(a) DSI

$$iq_t + \frac{1}{2}(q_{xx} + q_{yy}) = -\sigma |q|^2 q + \phi q, \qquad \sigma = \pm 1$$
$$\phi_{xx} - \phi_{yy} = +2\sigma(|q|^2)_{xx}$$

(b) DSII

$$iq_t + \frac{1}{2}(q_{xx} - q_{yy}) = +\sigma |q|^2 q + \phi q, \qquad \sigma = \pm 1$$
$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = -2\sigma(|q|^2)_{xx}$$

1 次元で可積分な方程式も空間次元を増やすと可積分でなくなることが多い（KdV や非線形 Schrödinger など）．KP 方程式や DS 方程式は可積分な高次元方程式の数少ない例である.

第2章

KdV 方程式の厳密解法

《 Korteweg-de Vries（コルトベーグ-ド・フリース）方程式 》

長波長水面波を記述する Korteweg-de Vries（KdV）方程式

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \qquad x \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0 \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{2.2}$$

に対して，1967 年 Gardner, Greene, Kruskal, Miura [26] らは，KdV 方程式の初期値問題の解を，定常 Schrödinger 方程式

$$v_{xx} - u(x,t)v = \lambda v, \qquad x \in \mathbf{R} \tag{2.3}$$

の固有値問題，逆散乱問題（散乱データからポテンシャルを求める問題）と関連付けて構成する方法を発見した．この方法は他の方程式にも適用できることがわかり，今日では逆散乱法と呼ばれている．この章では，Gardner, Greene, Kruskal, Miura らによって発見された方法（GGKM-法と略す）を紹介する．

2.1 直線上の Schrödinger 方程式に対する散乱問題

1 次元における Schrödinger 方程式

$$-\phi''(x) + u(x)\phi(x) = \lambda\phi(x), \qquad x \in \mathbf{R} \tag{2.4}$$

に対する散乱問題の概要を述べる．ここで $\phi(x)$ は波動関数，$u(x)$ は実数値ポテンシャル，λ はスペクトルパラメーターであり，波動関数 $\phi(x)$ のエネルギーを表す．

物理的に興味があるのは，$u(x)$ が遠方で十分早く減衰しているものに対し，(2.4) の非自明解

1. $\phi \in L^2(\mathbf{R})$；束縛状態（bound states），
2. $\phi(x)$ が遠方で周期的に振動しているもの；散乱状態（scattered wave）

がそれぞれどのような値の λ について存在するかに興味がある．

$u(x)$ は条件

$$\int_{\mathbf{R}} (1+|x|)^k |u(x)|\, dx < \infty, \qquad k = 0, 1, 2 \tag{2.5}$$

を満たすとする．このとき，次のことがわかっている．

1. 有限個の（ゼロもありうる）離散，単純固有値[*1]が存在する．それを

$$\lambda = \lambda_n = -\kappa_n^2, \qquad \kappa_n \in \mathbf{R}_+ = [0,\, \infty]$$

とおく．対応する固有関数を ϕ_n とすると $\phi_n \in L^2(\mathbf{R})$ となる．

2. 規格化された固有関数 $\phi_n(x)$,

$$\int_{\mathbf{R}} \phi_n^2(x)\,dx = 1, \quad \phi_n(x) > 0, \quad (x \to +\infty)$$

は次の性質を持つ．

$$\phi_n(x) \sim \begin{cases} C_n e^{-\kappa_n x}, & x \to +\infty \\ \tilde{C}_n e^{\kappa_n x} & x \to -\infty. \end{cases}$$

ここで，**規格化定数**を次のように定義する．

定義 2.1.

$$C_n := \lim_{x\to\infty} e^{\kappa_n x}\phi_n(x).$$

$\lambda = +\kappa^2$, $0 \neq \kappa \in \mathbf{R}$ に対しても $\phi(x) = O(1)$ となるような(2.4) の解が存在する．それを $\phi_\kappa(x)$ とおく．$|x| \to \infty$ では $e^{-i\kappa x}$ と $e^{i\kappa x}$ の一次結合で表されることから（$u(x)$ は遠方で十分早く減衰している）

$$\phi_\kappa(x) \sim \begin{cases} e^{-i\kappa x} + b(\kappa)e^{i\kappa x} & x \to +\infty, \\ a(\kappa)e^{-i\kappa x} & x \to -\infty \end{cases} \tag{2.6}$$

と書ける．ここで,

$$\begin{cases} a(\kappa) : \text{透過係数} \quad \text{(Transmission coefficient)} \\ b(\kappa) : \text{反射係数} \quad \text{(Reflection coefficient)} \end{cases}$$

といい，これらの間には

$$|a(\kappa)|^2 + |b(\kappa)|^2 = 1$$

の関係が成り立つ．(2.6) の物理的な意味は，右側から来た波が振幅を $a(\kappa)$ だけ変えて左側へ伝わり，反射されて戻ってきた波は振幅が $b(\kappa)$ だけ変わっているということを表している．

さて，Schrödinger 方程式(2.4) に対し，散乱データを次のように定義する．

定義 2.2. 与えられたポテンシャル $u(x)$ に対し，固有値，規格化定数，透過係数，反射係数からなる集合

$$\mathcal{S} = \{\kappa_n,\ C_n,\ a(\kappa),\ b(\kappa)\}$$

を**散乱データ**と呼ぶ．

[*1] 固有値が『単純』であるとは，対応する固有要素がすべてそのうちの 1 つの要素の数値倍で表されることを言う．

2.2 直線上の Schrödinger 方程式に対する逆散乱問題

逆散乱問題とは，散乱データ $\mathcal{S}$ からポテンシャル $V(x)$ を決定せよ，という問題である．1 次元の Schrödinger 方程式に対する逆散乱問題は 1950 年代前半に Gel'fand-Levitan [27]（半直線上），Marchenko [47]，Faddeev [19]（$\mathbf{R}$ 上）らによって解かれた．彼らによって解かれた方法の概要は以下のようなものである．

散乱データ κ_n, C_n, $b(\kappa)$ に対し，$B(\zeta)$ を

$$B(\zeta) := \sum_{n=1}^{N} C_n^2 e^{-\kappa_n \zeta} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} b(\kappa) e^{i\kappa\zeta}\, d\kappa \tag{2.7}$$

で定義する．ここで，N は離散固有値の数である．$K(x,y)$ は次の方程式の解とする．

$$K(x,y) + B(x+y) + \int_x^{\infty} B(x+y) K(x,z)\, dz = 0, \qquad y > x \tag{2.8}$$

この時，次が成り立つ．

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x,x) \tag{2.9}$$

積分方程式(2.8) を Gel'fand-Levitan（-Marchenko）（ゲルファント-レビタン-マルチェンコ）方程式という．

ポテンシャルの再構成の手順は次の通りである．まず与えられた散乱データ $\mathcal{S}$ から函数 $B(\zeta)$ を(2.7) で定義する．次に Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程式を解き，その解からポテンシャル $u(x)$ が(2.9) で与えられる．

2.3 GGKM-法

この節において，KdV 方程式の初期値問題の解が Schrödinger 方程式の固有値問題，逆散乱問題を通して，どのように構成されるかをみる．次の Schrödinger 方程式を考える．

$$\phi_{xx} - u(x,t)\phi = \lambda\phi, \qquad x \in \mathbf{R}. \tag{2.10}$$

ここで $u(x,t)$ は KdV 方程式

$$\begin{aligned} &u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \qquad x \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0 \\ &u(x,0) = u_0(x) \end{aligned}$$

を満たすとする．$t=0$ の時，KdV の初期値 $u_0(x)$ は与えられた関数であるから Schrödinger 方程式(2.10) に対する散乱データは計算して求めることが出来る．従って，以下では $t>0$ の時の散乱データの時間発展を調べてゆく．

2.3.1 スペクトルの時間不変性

Schrödinger 方程式(2.10) において，ポテンシャルにパラメータ t が入っていることこら，一般にそのスペクトル λ は t に依存する．しかし，ポテンシャルが KdV 方程式を満たしているとき，スペクトルは t に依らないのである．

定理 2.1. $u(x,t)$ は次の条件を満たすとする．

1. *KdV 方程式を満たす．*
2. $u \in C(\mathbf{R} \times [0,T])$ かつ
$$\max_{t\in[0,T]} |u(x,t)| \leq V(x)$$
を満たすとする．ただし $V(x)$ は条件(2.5) を満たす関数とする．
3. $$\frac{\partial^p u}{\partial x^p}(x,t) = O(1), \qquad |x| \to \infty, \quad p = 1,2,3.$$

このとき *Schrödinger* 方程式(2.10) のスペクトルは時間によらず一定である．すなわち
$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = 0.$$
を満たす．

証明は後にまわす．

注意 *2.1.* $t=0$ のときの離散固有値 $\lambda = -\kappa_n^2$ は時間がたっても固有値となる（すべての $t>0$ に対して，$\lambda = -\kappa_n^2$ は固有値）．さらに，時間が経っても新たに固有値は生成されない．

2.3.2 固有関数の時間発展

固有値 λ に対する固有関数 $\phi(x,t)$ の時間発展方程式を導く．まず次のことを示す．

定理 2.2. $u(x,t)$ は定理 *2.1* の仮定を満たすとする．λ を任意のスペクトルの点，また $\phi(x,t)$ を固有値 λ に対する固有関数とする．さらに
$$M(x,t) := \phi_t(x,t) - 2(u(x,t)+2\lambda)\phi_x(x,t) + u_x(x,t)\phi(x,t) \tag{2.11}$$
と定義すると，$M(x,t)$ は *Schrödinger* 方程式
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (u-\lambda)\right] M = 0 \tag{2.12}$$
を満たす．

証明 (概略)：(2.10) の両辺を t で微分する．
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (u-\lambda)\right] \phi_t = (u_t - \lambda_t)\phi$$

u_t を消すため，KdV 方程式を用いて

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (u-\lambda)\right]\phi_t - (6uu_x - u_{xxx})\phi + \lambda_t\phi = 0 \tag{2.13}$$

また，

$$u_{xxx}\phi = (u_x\phi)_{xx} - u_x\phi_x x - 2u_{xx}\phi_x$$

に注意すれば(2.10) より $\phi_{xx} = (\lambda - u)\phi$ を得る．このことから

$$u_{xxx}\phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (u-\lambda)\right]u_x - 2u_{xx}\phi_x$$

がわかり，これを(2.13) へ代入すると，

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (u-\lambda)\right](\phi_t + u_x\phi) - 2(3uu_x\phi + u_{xx}\phi_x) + \lambda_t\phi = 0 \tag{2.14}$$

を得る．さらに，

$$\phi_x u_{xx} = (u\phi)_{xx} - \phi_{xxx}u - 2\phi_{xx}u_x$$

に注意する．また(2.10) を x で微分すれば

$$\phi_{xxx} - u_x\phi - (u-\lambda)\phi_x = 0 \tag{2.15}$$

となり，この式の両辺に u をかければ

$$\phi_{xxx}u = uu_x\phi + (u-\lambda)u\phi_x$$

を得る．さらに，(2.10) の両辺に u_x をかけることにより

$$\phi_{xx}u_x = (u-\lambda)u_x\phi$$

がわかり，従って

$$\begin{aligned}\phi_x u_{xx} &= (u\phi_x)_{xx} - uu_x\phi - (u-\lambda)u\phi_x - 2(u-\lambda)u_x\phi \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (u-\lambda)\right](u\phi_x) - 3uu_x\phi + 2\lambda u_x\phi\end{aligned}$$

となる．(2.15) から

$$u_x\phi = \phi_{xxx} - (u-\lambda)\phi_x$$

である．このことこら

$$3uu_x\phi + u_{xx}\phi_x = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (u-\lambda)\right](u+2\lambda)\phi_x$$

となり，これを(2.14) へ代入して

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (u-\lambda)\right](\phi_t + u_x\phi - 2(u+2\lambda)\phi_x) &= -\lambda_t\phi \\ &= 0, \qquad \text{（定理 2.1 より）}\end{aligned} \tag{2.16}$$

を得る．これが求める式であった．

□

注意 *2.2.* 定理 2.1 の証明について簡単に述べておく．(2.10) と(2.16) から

$$-\lambda_t\phi^2 = \frac{\partial}{\partial x}(\phi M_x - \phi_x M)$$

得る．$||\phi|| = 1$ に注意して両辺積分すると

$$-\lambda_t = \left[\phi M_x - \phi_x M\right]_{-\infty}^{\infty}$$

となる．$\phi(x,t)$ とその微分 ϕ_t, ϕ_x の $|x| \to \infty$ での挙動から $\lambda_t = 0$ が従う．

定理 2.3 より固有関数 $\phi(x,t)$ の時間発展方程式が得られる．Schrödinger 方程式(2.12) を M について解くと，

$$\phi_t - 2(u + 2\lambda)\phi_x + u_x\phi = M = C\phi + D\psi \tag{2.17}$$

ここで，C，D は定数であり，ψ は各 λ に対する固有関数 ϕ と一次独立な Schrödinger 方程式の解である．実は $D = 0$ であることが次のようにしてわかる．

1. $\lambda = -\kappa_n^2$（離散固有値）の場合．対応する固有関数を $\phi_n(x,t)$ とすれば

$$\phi_n(x) \sim \begin{cases} C_n e^{-\kappa_n x}, & x \to \infty \\ \tilde{C}_n e^{\kappa_n x}, & x \to -\infty \end{cases}$$

という挙動を示すことから，ψ は

$$\psi(x) \sim \begin{cases} C_n e^{\kappa_n x}, & x \to \infty \\ \tilde{C}_n e^{-\kappa_n x}, & x \to -\infty \end{cases}$$

という挙動を示す項をもつ．(2.17) の左辺は $x \to \infty$ とした時ゼロに近づくので，$D = 0$ でなければならない．

2. $\lambda = \kappa^2$（連続スペクトル）の場合．

$$\phi(x,t), \quad \phi_x(s,t), \quad \phi_t(x,t) \sim e^{-i\kappa x}, \qquad x \to -\infty$$

ということと，ψ が ϕ と一次独立であることから，ψ は

$$\psi \sim \begin{cases} \tilde{a}(\kappa)e^{i\kappa x}, & x \to \infty \\ e^{i\kappa x} + \tilde{b}(\kappa)e^{-i\kappa x}, & x \to -\infty \end{cases}$$

$x \to -\infty$ とした時の(2.17) の両辺を比較すると $D = 0$ でなければならないことがわかる．

従って，任意のスペクトルの点 λ に対し，

$$\phi_t = 2(u + 2\lambda)\phi_x + (C - u_x)\phi \tag{2.18}$$

を得る．これが**固有関数が従う時間発展方程式**である．

注意 *2.3.* 定数 C は λ が $\lambda = -\kappa_n^2$（離散固有値）の場合と $\lambda = \kappa^2$（連続スペクトル）の場合とで異なる値をとる．

2.3.3 規格化定数 $C_n(t)$ の時間発展

我々の目標は散乱データの時間発展を調べることであった．スペクトル $\lambda(t)$ は時間によらず一定であることはすでに調べた．次は規格化定数 $C_n(t)$ の時間発展を調べる．

$\lambda = -\kappa_n^2$ とする．ϕ を対応する固有関数とし，

$$\int_{\mathbf{R}} \phi^2 dx = 1$$

と規格化する．固有関数の時間発展方程式(2.18) の両辺に ϕ をかけ，x で積分すると

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{R}} \phi^2 dx = \int_{\mathbf{R}} \{2(u+2\lambda)\phi\phi_x - u_x\phi^2\}dx + C\int_{\mathbf{R}} \phi^2 dx$$

となり，右辺第一項は 0 となることから $C=0$ がわかる．従って ϕ は

$$\phi_t = 2(u-2\kappa_n^2)\phi_x - u_x\phi$$

をみたす．

$$w(x,t) = e^{\kappa_n x}\phi(x,t) \tag{2.19}$$

とおくと，$C_n(t)$ の定義より有界閉区間 $t \in [T_0, T_1]$ において一様に

$$\lim_{x\to\infty} w(x,t) = C_n(t)$$

となる．また，Schrödinger 方程式の解は次の性質を持っている．

$$\lim_{x\to\infty} w_x(x,t) = 0, \qquad t \in [T_0, T_1] \text{ に対して一様.}$$

さて，(2.19) を(2.18) へ代入すると w は

$$w_t = 4\kappa_n^3 w + 2(u-2\kappa_n^2)w_x - (2\kappa_n u + u_x)w$$

を満たす．積分方程式に書き直すと

$$w(x,t) = w(x,0)e^{4\kappa_n^3 t} + \int_0^t e^{4\kappa_n^3(t-s)}\{2(u-2\kappa_n^2)w_x - (2\kappa_n u + u_x)w\}ds$$

となる．右辺第二項の { } の中は $|x| \to \infty$ とすると t に関して一様に 0 へ収束するので，両辺 $x \to \infty$ とすると，

$$\lim_{x\to\infty} w(x,t) = C_n(x) = e^{4\kappa_n^3 t}\lim_{x\to\infty} w(x,0) = C_n(0)e^{4\kappa_n^3 t}$$

となる．これが規格化定数の時間発展式である．以上のことをまとめると，

定理 2.3. $u(x,t)$ は定理 *2.1* の仮定を満たし，さらに

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} u_x(x,t) = 0, \qquad t \in [T_0, T_1] \text{ に対して一様}$$

を満たすとする．$\lambda = -\kappa_n^2$ を離散固有値，対応する規格化された固有関数を $\phi(x,t)$ とする．すなわち ϕ は

$$\int_{\mathbf{R}} \phi^2(x,t)dx = 1$$

を満たすとする．このとき規格化定数 $C_n(t) := \lim_{x\to\infty} e^{\kappa_n x}\phi(x,t)$ は

$$C_n(t) = C_n(0)e^{4\kappa_n^3 t} \tag{2.20}$$

で与えられる．

2.3.4 反射係数 $b(\kappa,t)$ の時間発展

ポテンシャル $u(x,t)$ によって得られる散乱データにおいて，これまでにスペクトル λ，規格化定数 $C_n(t)$ の時間発展式は得られた．最後に反射係数 $b(x,t)$ の時間発展を調べる．

定理 2.4. $u(x,t)$ は定理 *2.3* の条件を満たすとする．$\lambda = \kappa^2$ を連続スペクトルの任意の点とする．このとき

$$b(\kappa,t) = b(\kappa,0)e^{8i\kappa^3 t} \tag{2.21}$$

が成り立つ．

証明（概略）: 始めに形式的に計算してみる．固有関数の時間発展方程式(2.18) から

$$\psi_t = 4\kappa^2\phi_x + C\phi + 2u\phi_x - u_x\phi$$

となる．定理 2.3 の仮定から右辺第三項と第四項は $|x| \to \infty$ で 0 となるから，x が十分大きいところでは，ϕ は

$$\phi_t = 4\kappa^2\phi_x + C\phi \tag{2.22}$$

を満たすと思ってよい．また，

$$\phi \sim e^{-i\kappa x} + be^{i\kappa x}, \qquad x \to \infty$$

であることから

$$\begin{cases} \phi_t \sim b_t e^{i\kappa x} \\ \phi_x \sim -i\kappa e^{-i\kappa x} + i\kappa b e^{i\kappa x} \end{cases} \tag{2.23}$$

が得られる．これらを(2.22) へ代入すると

$$b_t e^{i\kappa x} = (4i\kappa^3 + C)be^{i\kappa x} + (-4i\kappa^3 + C)e^{-i\kappa x}, \quad (x \to \infty)$$

となる．両辺の係数を比較すれば

$$C = 4i\kappa^3, \qquad b_t = 8i\kappa^3 b$$

がわかり，従って

$$b(\kappa,t)=b(\kappa,0)e^{8i\kappa^3 t}$$

を得る．

(証明概要)

$$\phi(x,t)=e^{-i\kappa x}w^{(1)}(x,t)+e^{i\kappa x}w^{(2)}(x,t)$$

とおく．

$$\lim_{x\to\infty} w^{(1)}(x,t)=1,\quad \lim_{x\to\infty} w^{(2)}(x,t)=b(\kappa,t),\quad t\in[T_0,T_1]\ \text{一様}$$

であることと

$$w_x^{(1)}(x,t),\quad w_x^{(2)}(x,t)\longrightarrow 0,\qquad x\to\infty,\quad t\in[T_0,T_1]\ \text{一様}$$

となることからこれらを(2.18) へ代入，$e^{i\kappa x}$ をかけて t で積分すると

$$\begin{aligned}
&w^{(1)}(x,t)-w^{(1)}(x,0)+(4i\kappa^3-C)\int_0^t w^{(1)}(x,s)ds+\\
&\qquad+\int_0^t\big[-2(u+2\kappa^2)w_x^{(1)}+(2i\kappa u+u_x)w^{(1)}\big]ds\\
&\qquad=-e^{2i\kappa x}\Big\{w^{(2)}(x,t)-w^{(2)}(x,0)-(4i\kappa^3+C)\int_0^t w^{(2)}(x,s)ds+\\
&\qquad+\int_0^t\big[-2(u+2\kappa^2)w_x^{(2)}+(-2i\kappa u+u_x)w^{(2)}\big]ds\Big\}
\end{aligned}$$

となる．ここで両辺 $x\to\infty$ とした時，左辺は収束するが，右辺は { } の中が 0 でないかぎり，存在しない．したがって，

$$\lim_{x\to\infty}\Big\{w^{(1)}(x,t)-w^{(1)}(x,0)+(4i\kappa^3-C)\int_0^t w^{(1)}ds\Big\}=0$$
$$\lim_{x\to\infty}\Big\{w^{(2)}(x,t)-w^{(2)}(x,0)-(4i\kappa^3+C)\int_0^t w^{(2)}ds\Big\}=0$$

でなければならない．1 番目の式から $w^{(1)}\to 1$（$x\to\infty$）により $C=4i\kappa^3$ がわかり，さらに 2 番目の式から

$$b(\kappa,t)=b(\kappa,0)+8i\kappa^3\int_0^t b(\kappa,s)ds$$

を得る．

□

2.3.5 KdV 方程式の解の構成

準備が整ったところで，KdV 方程式の解の構成の手順を紹介する．

Step 1. $t=0$ のとき，KdV 方程式の初期値 $u_0(x)$ は与えられた関数である．この初期値をポテンシャルに持つような Schrödinger 方程式

$$\phi_{xx}(x) - u_0(x)\phi(x) = \lambda\phi(x), \qquad x \in \mathbf{R}$$

の散乱データ

$$\mathcal{S} = \{\lambda,\ C_n(0),\ b(\kappa,0)\}$$

を求める（スペクトル λ については，離散固有値 $-\kappa_n$ と連続スペクトル κ^2 をそれぞれ求める）．

Step 2. $t>0$ での散乱データを計算する．それは次の公式により求まる（定理 2.1, 2.3, 2.4）．

$$\mathcal{S}(t) = \{\lambda(t),\ C_n(t),\ b(\kappa,t)\} = \{\lambda,\ C_n(0)e^{4\kappa_n^3 t},\ b(\kappa,0)e^{8i\kappa^3 t}\}.$$

Step 3. 上で求めた散乱データ $\mathcal{S}(t)$ から，関数 $B(\zeta,t)$ を次のように定義する．

$$B(\zeta,t) := \sum_{n=1}^{N} C_n^2(t)e^{-\kappa_n\zeta} + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} b(\kappa,t)e^{i\kappa\zeta}d\kappa.$$

この $B(\zeta,t)$ に対して Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程式

$$K(x,y;t) + B(x+y;t) + \int_x^\infty B(z+y;t)K(x,z;t)dz = 0$$

を解く（x, t はパラメータである）．ここで求めた解 $K(x,y;t)$ から

$$-2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x;t) = u(x,t)$$

が得られる．$u(x,t)$ が求める KdV 方程式の解である．

ここで紹介した GGKM-法は後に，後半の逆問題を解くところから**逆散乱法**と呼ばれるようになった．

KdV 方程式が逆散乱法によって解けるための条件をここでまとめておく．

1. 散乱問題を解く際に必要な条件：

$$\int_{\mathbf{R}} (1+|x|)^k |u(x,t)| dx < \infty, \qquad k=0,1,2. \quad t \in [0,T].$$

2. スペクトルの時間不変性に必要な条件：

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p}(x,t) = O(1), \qquad |x| \to \infty, \quad p=1,2,3.$$

3. 散乱データの時間発展を得る際必要な条件：

$$u(x,t),\ u_x(x,t) \longrightarrow 0, \qquad |x| \to \infty. \quad t \in [T_0,T] \text{ 一様}.$$

KdV 方程式の解 $u(x,t)$ がこれらの性質を満たしている必要がある．初期値 $u_0(x)$ に適切な減衰条件を課すことで，これらの条件は満たされることがわかっている（Cohen [14]）．

2.4 等スペクトルポテンシャルと Lax pair

逆散乱法では，Schrödinger 作用素の固有値が時間に依らず一定であることが大事であった．前節ではこれを導くために，ポテンシャルが KdV 方程式を満たしているということを使ったのであった．では，ポテンシャルが他の非線形発展方程式を満たす場合，KdV と同様に固有値の時間普遍性が得られるか？さらには逆散乱法により KdV 方程式以外の非線形発展方程式の解を厳密に求めることが出来るのだろうか？この節では，Lax [44] による方法を紹介する．

L をバナッハ空間上の閉作用素とし，

$$L(t) = L_0 + M_u$$

を考える．ここで，L_0 はある 1 つの作用素であり，M_u は $u(x,t)$ をかける掛け算作用素である．L の固有値が t によらず一定のとき $u(x,t)$ を**等スペクトルポテンシャル**という．

定理 2.5. $L(t)$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上定義された自己共役作用素とし，t に関して連続的微分可能とする[*2]．また，L_t の離散固有値と対応する固有関数 ϕ も t に関して連続的微分可能で，

$$\phi,\ \frac{\partial \phi}{\partial t} \in \mathcal{D}(L(t)) \subset \mathcal{H}$$

と仮定する．ここで $\mathcal{D}(L(t))$ は作用素 $L(t)$ の定義域を表す．さらに，

$$\frac{\partial L}{\partial t} = B(t)L(t) - L(t)B(t) := [B(t), L(t)] \tag{2.24}$$

を満たしかつ，

$$B(t),\ B(t)L(t),\ L(t)B(t),\ L(t),\ \frac{\partial L}{\partial t} \in \mathcal{D}(L(t))$$

となる作用素 $B(t)$ が存在すると仮定する．このとき

1. $L(t)$ の離散固有値は t に関して不変である．
2. もし $L(t)$ の固有値が単純であれば固有関数 $\phi(x,t)$ は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (B(t) + C)\phi \tag{2.25}$$

を満たす．ここで，$C = C(t)$ は任意の関数である．

[*2] $\mathcal{H}$ をヒルベルト空間，$\mathcal{B}$ をバナッハ空間とする．定義域を $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ に持ち $\mathcal{B}$ に値をとる作用素 $F(t)$ が $t = t_0$ で微分可能とは，すべての $f \in \mathcal{H}_0$ に対して極限

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(t_0 + \varepsilon) - F(t_0)}{\varepsilon} f$$

が $\mathcal{B}$ において存在するときをいう．この極限を

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t}\Big|_{t=t_0}$$

と書く．例えば，$L(t) = \partial_x^2 + u(x,t)$ の場合は

$$\frac{\partial L(t)}{\partial t} = u_t(x,t) = M_{u_t}$$

となる．

3. もし $B(t)+C$ が *antisymmetric* ならば

$$\|\phi\| = \int_{\mathbf{R}} |\phi(x,t)|^2 dx$$

は t によらない．

注意 *2.4.* (2.24) を **Lax 方程式**といい，与えられた問題を(2.24) のような形に表すことを **Lax 表示**という．Lax 方程式は

$$\begin{cases} L\phi = \lambda\phi \\ \phi_t = B\phi \end{cases}$$

の両立条件であり，固有値問題のスペクトルが t によらず一定であることを意味する．

逆散乱法では Lax 方程式(2.24) をみたすような作用素の対，L, B を見つけることが重要である．このような対を **Lax 対（Lax pair）**という．

注意 *2.5.* KdV 方程式の場合 Lax 対は

$$\begin{cases} L(t) = \partial_x^2 + u, \qquad u = u(x,t) \\ B(t) = -4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x \end{cases}$$

となる．実際，

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} &= u_t(x,t) \\ [B(t), L(t)] &= \partial_x^3 - 6u\partial_x u \end{aligned}$$

から $u(x,t)$ が KdV 方程式をみたすならば

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [B(t), L(t)]$$

となり，$L(t)$ と $B(t)$ は Lax 対であることがわかる．

注意 *2.6.* L が $L(t) = \partial_x^2 - u(x,t)$ で与えられた場合，定理 2.5 によれば

- $[B(t), L(t)] = M_W$ を満たす（antisymmetric な）作用素 $B(t)$ をみつける．ここで M_W は掛け算作用素であり，W は $u(x,t)$ の関数 $W = K(u)$ である．
- この $B(t)$ に対し，等スペクトルポテンシャル $u(x,t)$ は

  $$-u_t = K(u)$$

  の解となる．

ということになるが，実際に $B(t)$ をどうやって見つけたらよいか？

$B(t)$ を antisymmetric で実係数の線形微分作用素とする．$B(t)$ は antisymmetric より，偶数階ではないことから

$$B_q = \frac{\partial^{2q+1}}{\partial x^{2q+1}} + \sum_{j=1}^{q} \left\{ b_j \frac{\partial^{2j-1}}{\partial x^{2j-1}} + \frac{\partial^{2j-1}}{\partial x^{2j-1}} b_j \right\}$$

とおく．係数 b_j は後で決める．$q=1$ の場合を考えると

$$B_1 = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + b_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} b_1$$

である．

$$[B_1, L(t)] = B_1L(t) - L(t)B_1 = -\left(3\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial b_1}{\partial x}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$
$$-\left(3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 b_1}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2b_1\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 b_1}{\partial x^3}\right)$$

であるが，$[B_1, L(t)]$ が掛け算作用素となることから $b_1 = -\dfrac{3}{4}u$ がわかる．従って

$$[B_1, L(t)] = -\frac{1}{4}(u_{xxx} - 6uu_x)$$

となる．定理 2.5 より等スペクトルポテンシャル $u(x,t)$ は

$$u_t = \frac{1}{4}(u_{xxx} - 6uu_x)$$

を満たすことがわかる．

定理 2.5 の証明（概略）

$\zeta(t)$ を固有値，$\phi(x,t)$ を対応する固有関数とする．

$$L(t)\phi + \zeta(t)\phi = 0$$

の両辺を t で微分すると

$$\frac{\partial L}{\partial t}\phi + L(t)\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \zeta(t)}{\partial t}\phi + \zeta(t)\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

となる．(2.24) より

$$[L(t) + \zeta(t)]\frac{\partial \phi}{\partial t} + B(t)L(t)\phi - L(t)B(t)\phi + \frac{\partial \zeta(t)}{\partial t}\phi = 0$$

となるが，$B(t)L(t)\phi = B(t)(-\zeta(t)\phi) = -\zeta(t)B(t)\phi$ により

$$[L(t) + \zeta(t)]\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - B(t)\phi\right) + \frac{\partial \zeta(t)}{\partial t}\phi = 0 \tag{2.26}$$

を得る．この式の両辺に ϕ をかけて内積をとれば，$L(t)$ が自己共役より，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta(t)}{\partial t}\|\phi\|^2 &= -\left\langle \phi\,,\,[L(t) + \zeta(t)]\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - B(t)\phi\right)\right\rangle \\ &= -\left\langle [L(t) + \zeta(t)]\phi\,,\,\frac{\partial \phi}{\partial t} - B(t)\phi\right\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

となる．ϕ は固有関数であることから $0 \not\equiv \phi \in L^2$．従って $\zeta_t(t) = 0$ を得る．これは，$\zeta(t)$ が $t = t_0$ に対する固有値だとすると，全ての t に対して $\zeta(t)$ が固有値であることをいっている．

(2.26) と $\zeta_t = 0$ から，

$$[L(t) + \zeta(t)]\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - B(t)\phi\right) = 0$$

を得る．$L(t)$ の固有値が単純であることから

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - B(t)\phi = C(t)\phi, \qquad C(t) \text{ は任意の関数} \tag{2.27}$$

がわかる．両辺に ϕ をかけて内積をとると，$B(t)+C$ が antisymmetric であることから，

$$\left\langle \phi\,,\ \frac{\partial\phi}{\partial t}\right\rangle = <\phi\,,\ (B(t)+C)\phi>$$

となり，従って

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\phi(t)\|^2 &= <\phi, (B+C)\phi> + <(B+C)\phi, \phi> \\ &= 0\end{aligned}$$

を得る．

□

注意 *2.7.* KdV 方程式の場合，

$$B(t) = -4\partial_x^3 - 6u(x,t)\partial_x - 3u_x(x,t)$$

とすると，定理 2.5 により固有関数の時間発展方程式は

$$\phi_t = -4\phi_{xxx} + 6u\phi_x + 3u_x\phi$$

となる．一方，Schrödinger 方程式 $-\phi_{xx} + u(x,t)\phi = \lambda\phi$ の両辺を x で微分すると

$$\phi_{xxx} = (u-\lambda)\phi_x + u_x\phi.$$

従って

$$\phi_t = 2(u+2\lambda)\phi_x - u_x\phi$$

となり，前節で導いた固有関数の発展方程式が得られる．

第3章

非線形 Schrödinger 方程式

$q = q(x,t)$, $r = r(x,t)$ とする．次の Generalized Zakharov-Shabat System

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial x} - qv_2 + i\zeta v_1 = 0 \\ -\dfrac{\partial v_2}{\partial x} + rv_1 + i\zeta v_2 = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

のスペクトル $\zeta = \zeta(t)$ が時間不変となるようなポテンシャル q, r の発展方程式を導く．

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \partial_x & -q \\ r & -\partial_x \end{bmatrix}$$

とおくと，(3.1) は

$$L\boldsymbol{v} + i\zeta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

となる．この L に対して Lax 対を見つける．すなわち

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial t} = BL - LB \\ \boldsymbol{v}_t = B\boldsymbol{v} \end{cases} \tag{3.2}$$

を満たす作用素 B を見つけことを考える．まず，

$$L_t = \frac{\partial L}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0 & -q_t \\ r_t & 0 \end{bmatrix}$$

であることに注意する．$B = \{\beta_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq 2}$ とおく．(3.2) から

$$\begin{cases} \partial_x\beta_{11} - \beta_{11}\partial_x - q\beta_{21} - \beta_{12}r = 0 \\ \partial_x\beta_{22} - \beta_{22}\partial_x - \beta_{21}q - r\beta_{12} \quad = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \partial_x\beta_{12} + \beta_{12}\partial_x - q\beta_{22} + \beta_{11}q = q_t \\ \partial_x\beta_{21} + \beta_{21}\partial_x - r\beta_{11} + \beta_{22}r = r_t. \end{cases} \tag{3.4}$$

いま，β_{ij} として 2 階の微分作用素を考える．すなわち，

$$\beta_{ij} = \beta_{ij}^{(0)} + \beta_{ij}^{(1)}\partial_x + \beta_{ij}^{(2)}\partial_x^2 \tag{3.5}$$

とおく．(3.5) を(3.3) と(3.4) に代入し，係数を比較すると，

$$\beta_{21}^{(2)}=\beta_{12}^{(2)}=0 \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} \partial_x\beta_{11}^{(2)}-\beta_{11}^{(1)}=0 \\ \partial_x\beta_{22}^{(2)}-\beta_{22}^{(1)}=0 \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} 2\beta_{12}^{(1)}-q(\beta_{22}^{(2)}-\beta_{22}^{(1)})=0 \\ 2\beta_{21}^{(1)}-r(\beta_{22}^{(2)}-\beta_{22}^{(1)})=0 \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} \partial_x\beta_{11}^{(1)}-q\beta_{21}^{(1)}-r\beta_{12}^{(1)}=0 \\ \partial_x\beta_{22}^{(1)}-q\beta_{21}^{(1)}-r\beta_{12}^{(1)}=0 \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} \partial_x\beta_{12}^{(1)}+2\beta_{12}^{(0)}-q(\beta_{22}^{(1)}-\beta_{11}^{(1)})+2\beta_{11}^{(2)}q_x=0 \\ \partial_x\beta_{21}^{(1)}+2\beta_{21}^{(0)}+r(\beta_{22}^{(1)}-\beta_{11}^{(1)})+2\beta_{22}^{(2)}r_x=0 \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} \partial_x\beta_{11}^{(0)}-q\beta_{21}^{(0)}-r\beta_{12}^{(0)}-r_x\beta_{12}^{(0)}=0 \\ \partial_x\beta_{22}^{(0)}-q\beta_{21}^{(0)}-r\beta_{12}^{(0)}-q_x\beta_{21}^{(1)}=0 \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} q_t=\partial_x\beta_{12}^{(0)}-q(\beta_{22}^{(0)}-\beta_{11}^{(0)})+\beta_{11}^{(1)}q_x+\beta_{11}^{(2)}q_{xx} \\ r_t=\partial_x\beta_{21}^{(0)}+r(\beta_{22}^{(0)}-\beta_{11}^{(0)})+\beta_{22}^{(1)}r_x+\beta_{22}^{(2)}r_{xx} \end{cases} \tag{3.12}$$

(3.8) を(3.9) へ代入すると

$$\partial_x\beta_{11}^{(1)}=\partial_x\beta_{22}^{(1)}=0$$

を得る．ここで，

$$\beta_{11}^{(1)}=\beta_{22}^{(1)}=0 \tag{3.13}$$

ととる．(3.7) から $\beta_{ii}^{(2)}$ は x によらない関数となる．(3.8) と(3.13) を(3.10) へ代入して

$$\begin{cases} \beta_{12}^{(0)}=-\dfrac{1}{4}(\beta_{22}^{(2)}+3\beta_{11}^{(2)})q_x \\ \\ \beta_{21}^{(0)}=-\dfrac{1}{4}(3\beta_{22}^{(2)}+\beta_{11}^{(2)})r_x \end{cases} \tag{3.14}$$

(3.8) と(3.14) を(3.11) へ代入

$$\begin{cases} \partial_x\beta_{11}^{(0)}=-\dfrac{1}{4}(\beta_{22}^{(2)}+3\beta_{11}^{(2)})(rq_x+qr_x) \\ \\ \partial_x\beta_{22}^{(0)}=-\dfrac{1}{4}(3\beta_{22}^{(2)}+\beta_{11}^{(2)})(rq_x+qr_x) \end{cases}$$

積分して

$$\begin{cases} \beta_{11}^{(0)}=-\dfrac{1}{4}(\beta_{22}^{(2)}+3\beta_{11}^{(2)})rq+C_1 \\ \\ \beta_{22}^{(0)}=-\dfrac{1}{4}(3\beta_{22}^{(2)}+\beta_{11}^{(2)})rq+C_2 \end{cases}$$

以上で，B が決定できた．ただし，C_1, C_2, $\beta_{ii}^{(2)}$ の自由度がある．

これらを(3.4) へ代入するとポテンシャルの時間発展方程式が得られる．

$$\begin{cases} q_t = \dfrac{1}{2}(\beta_{22}^{(2)} - \beta_{11}^{(2)})(q^2 r - \dfrac{1}{2}q_{xx}) - (C_2 - C_1)q \\ r_t = -\dfrac{1}{2}(\beta_{22}^{(2)} - \beta_{11}^{(2)})(qr^2 - \dfrac{1}{2}r_{xx}) + (C_2 - C_1)r \end{cases} \tag{3.15}$$

さて，Zakharov-Shabat system (3.1) において $r = \mp\bar{q}$ の場合を考える．このとき(3.15) は

$$\begin{cases} q_t = \dfrac{1}{2}(\beta_{22}^{(2)} - \beta_{11}^{(2)})(\mp q|q|^2 - \dfrac{1}{2}q_{xx}) - (C_2 - C_1)q \\ \bar{q}_t = -\dfrac{1}{2}(\beta_{22}^{(2)} - \beta_{11}^{(2)})(\mp\bar{q}|q|^2 - \dfrac{1}{2}\bar{q}_{xx}) + (C_2 - C_1)\bar{q} \end{cases}$$

となる．この二つの式が両立するには，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(\beta_{22}^{(2)} - \beta_{11}^{(2)}) = i\alpha, & \alpha : \text{実数} \\ C_2 - C_1 = i\gamma, & \gamma : \text{実数} \end{cases}$$

でなければならない．$\gamma = 0$ ととれば，非線形 Schrödinger 方程式

$$\frac{2i}{\alpha}q_t = q_{xx} \pm 2q|q|^2$$

を得る．これは 1972 年に Zakharov-Shabat [75] によって初めて逆散乱法によって解かれた．解の構成手順は KdV 方程式の場合と同様である．

ここでは行列 B は作用素として求めたが，実は関数を成分に持つ行列としても求めることができる．詳しくは Eckhaus-Harten [17, pp. 174-181] を参照のこと．

第 4 章

補遺

この章では Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程式(2.8) とその解が(2.9) を満たすということがどのようにして導かれるかを概観する．厳密な証明については例えば Eckhaus-Harten [17] にあるので参照してほしい．

Schrödinger 方程式

$$-\phi''(x) + u(x)\phi(x) = \lambda\phi(x), \qquad x \in \mathbf{R} \tag{4.1}$$

を考える．$\lambda = \kappa^2$, $\kappa \in \mathbf{C}$ とする．$\kappa \in \overline{\mathbf{C}_+} := \{z \in \mathbf{C}\,;\, \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ に対し，

$$\phi_r(x,\kappa) = e^{-i\kappa x}R(x,\kappa), \qquad \phi_l(x,\kappa) = e^{i\kappa x}L(x,\kappa)$$

という形の解を考える．それぞれ方程式(4.1) へ代入すれば R と L の満たす方程式が得られるが，その中で特に

$$\begin{cases} R''(x,\kappa) - 2i\kappa R'(x,\kappa) = u(x)R(x,\kappa) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} R(x,\kappa) = 1, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} R'(x,\kappa) = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} L''(x,\kappa) + 2i\kappa L'(x,\kappa) = u(x)L(x,\kappa) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} L(x,\kappa) = 1, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} L'(x,\kappa) = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

を満たす解について考える．

ポテンシャル $u(x)$ としては，次の条件

$$\int_{\mathbf{R}} (1+|x|)^m |u(x)| dx < \infty \tag{4.4}$$

を満たすものを考える．(4.4) を m 位の増大条件（growth condition of order m）と呼ぶ．以後これを $GC(m)$ と略すことにする．

まず，Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程式を導くために必要な解 R と L の性質についてまとめておく．

4.1 解の存在と一意性

(4.3) を積分方程式に書き直すと

$$L(x,\kappa) = 1 + \int_x^\infty H(x,y,\kappa)L(y,\kappa)dy \tag{4.5}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} &H(x,y,\kappa) = \frac{u(y)}{2i\kappa}\{e^{2i\kappa(y-x)} - 1\}, \qquad \kappa \in \overline{\mathbf{C}_+} \setminus \{0\} \\ &H(x,y,0) = u(y)(y-x) \end{aligned}$$

である．

$\mathbf{R} \times \overline{\mathbf{C}_+} \setminus \{0\}$ 上定義された関数 $w(x,\kappa)$ で，各 $\kappa \in \overline{\mathbf{C}_+} \setminus \{0\}$ に対し x について連続かつ $w(x,\kappa) = O(1)$, $(x \to \pm\infty)$ を満たす集合を $W^\pm$ と書くことにする．

定理 4.1. $u(x)$ は $GC(0)$ を満たすとする．このとき積分方程式(4.5) をみたす解 $L \in W^+$ が唯一つ存在し，

$$L(x,\kappa) = \sum_{l=0}^{\infty} H_l(x,\kappa) \tag{4.6}$$

$$H_0(x,\kappa) = 1, \quad H_{l+1}(x,\kappa) = \int_x^\infty H(x,y,\kappa)H_l(y,\kappa)dy$$

で与えられる．この解 L は(4.3) をみたす（古典）解でもある．

$R(x,\kappa)$ についても同様の一意存在定理がいえるが，ここでは省略する．

Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程式を導く際には，解の κ に関する解析性が重要な役割をはたす．

定理 4.2. $u(x)$ は $GC(0)$ を満たすとする．このとき

$$\frac{d^lR}{dx^l}, \quad \frac{d^lL}{dx^l} \in C(\mathbf{R} \times (\overline{\mathbf{C}_+} \setminus \{0\})), \qquad l = 0,1,2$$

となる．また，各 $x \in \mathbf{R}$ に対し 2 階までの導関数はすべて k に関して解析的である．

さらに，$u(x)$ が $GC(1)$ を満たすならば(4.5) は $k=0$ のときも一意に解け，その解 R, L は

$$\frac{d^lR}{dx^l}, \quad \frac{d^lL}{dx^l} \in C(\mathbf{R} \times \overline{\mathbf{C}_+}), \qquad l = 0,1,2$$

となる．

4.2 解の漸近挙動

$\kappa \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ の場合，ϕ_r と $\overline{\phi_r}$，ϕ_l と $\overline{\phi_l}$ はそれぞれ互いに一次独立な(4.1) の解となる．2階の線形常微分方程式の解は2つの一次独立な解の線形結合で書けることから，

$$\begin{cases} \phi_l = l_-(\kappa)\phi_r + l_+(\kappa)\overline{\phi_r} \\ \phi_r = r_+(\kappa)\phi_l + r_-(\kappa)\overline{\phi_l} \end{cases} \tag{4.7}$$

と書ける．(4.2) と(4.3) より $\kappa \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ に対し ϕ_r と ϕ_l の $|x| \to \infty$ での漸近挙動が得られる．

$$\phi_l(x,\kappa) \sim \begin{cases} e^{i\kappa x} & x \to \infty \\ l_+(\kappa)e^{i\kappa x} + l_-(\kappa)e^{-i\kappa x} & x \to -\infty \end{cases}$$

$$\phi_r(x,\kappa) \sim \begin{cases} r_+(\kappa)e^{i\kappa x} + r_-(\kappa)e^{-i\kappa x} & x \to \infty \\ e^{-i\kappa x} & x \to -\infty \end{cases}$$

さらに係数の間には次の関係が成り立つ．

$$l_+(\kappa) = r_-(\kappa), \qquad l_-(\kappa) = -\overline{r_+}(\kappa) \tag{4.8}$$

$$|l_+(\kappa)|^2 = |l_-(\kappa)|^2 + 1, \qquad |r_-(\kappa)|^2 = |r_+(\kappa)|^2 + 1 \tag{4.9}$$

$r_\pm(\kappa)$，$l_\pm(\kappa)$ は $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ 上定義される関数であるが，$r_-(\kappa)$ と $l_+(\kappa)$ は次のように $\overline{\mathbf{C}_+} \setminus \{0\}$ へと拡張できる．

定義 4.1. $\kappa \in \overline{\mathbf{C}_+} \setminus \{0\}$ に対し

$$r_-(\kappa) = l_+(\kappa) := \frac{1}{2i\kappa}(RL' - LR' + 2i\kappa RL)$$

で定義する．

ポテンシャル $u(x)$ に $GC(2)$ という条件を課せば $1/r_-(\kappa)$ は $\kappa = 0$ で連続であることがわかる．このことは Gel'fand-Levitan- Marchenko 方程式を導く際の重要な性質となる．

定理 4.3. $u(x)$ は $GC(2)$ を満たすとする．このとき透過係数

$$a_r(\kappa) := \frac{1}{r_-(\kappa)}$$

は $\kappa = 0$ で連続である．

4.3 スペクトル

$L^2(\mathbf{R})$ 上で Schrödinger 作用素

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u$$

を考える．定義域を $\mathcal{D}(L) = H_0^2 := \{\phi \in L^2\,;\, \phi'' \in L^2\}$ とする．レゾルベント集合を $\rho(L)$，スペクトルを $\sigma(L)$，固有値の集合を $\sigma_p(L)$ とする．これらは前節で定義した $r_-(\kappa)$（散乱係数）で次のように特徴づけられる．

定理 4.4. $u(x)$ は $GC(0)$ を満たすとする．このとき

- $\rho(L) = \{\lambda \in \mathbf{C}\,;\, \lambda = \kappa^2, \kappa \in \mathbf{C}_+, r_-(\kappa) \neq 0\}$
- $\sigma_p(L) = \{\lambda \in \mathbf{C}\,;\, \lambda = \kappa^2, \kappa \in \mathbf{C}_+, r_-(\kappa) = 0\} \subset (-l, 0)$ *for some* $l > 0$
- $\sigma(L) = \sigma_p(L) \cup [0, \infty) \subset \mathbf{R}$

が成り立つ．さらに $(0, \infty)$ には固有値は含まれない．

さらに次のような性質がある．

系 4.1. 各固有値 $\lambda = \kappa^2 \in \sigma_p(L)$ は単純である．また，

$$\phi_r(x, \kappa) = \alpha(\kappa)\phi_l(x, \kappa), \qquad 0 \neq \alpha(\kappa) \in \mathbf{R}$$

と書ける．

$\alpha(\kappa)$ と定義 2.1 で定義した規格化定数 C_n の間には次のような関係がある．

定理 4.5. $u(x)$ は $GC(1)$ を満たすとする．このとき離散固有値の数は有限である．その固有値を $-\nu_1 < -\nu_2 < \cdots < -\nu_N < 0$ とし，$\kappa_n = \sqrt{\nu_n}$ とおけば，規格化定数 C_n と系 *4.1* に現れる係数 $\alpha(\kappa)$ との間には

$$C_n = \frac{\alpha(i\nu_n)}{\|\phi_r(\cdot, i\nu_n)\|}$$

という関係式が成り立つ．

$r_-(\kappa)$ のゼロ点集合が $\sigma_p(L)$ であったが，次の定理より $r_-(\kappa)$ のゼロ点は一位であることがわかる．

定理 4.6. $\lambda = \kappa^2 \in \sigma_p(L)$ とし，$0 \neq \alpha(\kappa) \in \mathbf{R}$ は系 *4.1* のものとする．このとき次が成り立つ．

$$\frac{dr_-}{d\kappa}(\kappa) = \frac{1}{i\alpha(\kappa)}\|\phi_r(\cdot, \kappa)\|^2$$

4.4 解の Fourier 変換表示

$f(x, \kappa)$, $g(x, s)$ に対し，変数 κ, s に関する Fourier 変換と逆 Fourier 変換を

$$(\mathcal{F}_{\kappa \to s} f)(x, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-i\kappa s} f(x, \kappa) d\kappa$$

$$(\mathcal{F}_{s \to \kappa}^{-1} g)(x, \kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{is\kappa} g(x, s) ds$$

で定義する．定理 4.1 で与えた解 $L(x, \kappa)$ を κ に関して Fourier 変換してみよう．

$$L(x, \kappa) - 1 = H_1(x, \kappa) + \sum_{m=2}^{\infty} H_m(x, \kappa) \tag{4.10}$$

と書き直して考える．ここで H_1 は

$$H_1(x,\kappa) = \int_x^\infty H(x,y,\kappa)dy$$
$$= \int_x^\infty \frac{u(y)}{2i\kappa}\{e^{2i\kappa(y-x)} - 1\}dy$$

である．$\theta(s)$ をヘビサイド関数，$U(z)$ を $u(y)$ の積分, つまり

$$\theta(s) = \begin{cases} 1 & s \geq 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases}, \qquad U(z) = \int_z^\infty u(y)dy$$

とすれば，部分積分と変数変換 $s = 2(y-x)$ により

$$H_1(x,\kappa) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \theta(x)e^{i\kappa s}U(x+s/2)ds$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\mathcal{F}^{-1}_{s\to\kappa}(\theta(x)U(x+s/2))\right\}(x,\kappa)$$

となる．κ に関して Fourier 変換すれば

$$(\mathcal{F}_{\kappa\to s}H_1)(x,s) = \frac{1}{2}\theta(s)U(x+s/2) \tag{4.11}$$

を得る．

$\displaystyle\sum_{m=2}^\infty H_m$ の性質は(4.10) より $L-1-H_1$ の性質を調べればよく，それは定理 4.2 より各 $x \in \mathbf{R}$ に対し $\mathbf{C}_+$ 上解析的で $\overline{\mathbf{C}_+}$ 上連続であることがわかる．

$$I(x,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\mathcal{F}_{\kappa\to s}\left(\sum_{m=2}^\infty H_m\right)\right\}(x,s) \tag{4.12}$$

とおこう．次の補題から任意の $s<0$ に対し $I(x,s)=0$ がわかり，$I(x,s)$ の連続性から

$$I(x,0) = 0 \tag{4.13}$$

となる．

補題 4.1. $f(z)$ は $\overline{\mathbf{C}_+}$ 上連続，$\mathbf{C}_+$ 上解析的とし，実軸上では $L^1(\mathbf{R})$，また $\displaystyle\sup_{z\in\overline{\mathbf{C}_+}} |zf(z)| < \infty$ を満たすとする．このときすべての $s<0$ に対して

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-izs}f(z)dz = 0$$

証明：積分路を $[-R,R]$ と $C_R := \{z\,;\,|z|=R,\ \mathrm{Im}\,z \geq 0\}$ から成るものをとる．この内部では被積分関数は解析的であるから Cauchy の積分定理より

$$\int_{-R}^R e^{-izs}f(z)dz + \int_{C_R} e^{-izs}f(z)dz = 0$$

を得る．この式で両辺 $R\to\infty$ とすればよい．

□

さて，(4.10) の両辺を κ について Fourier 変換すると，

$$N(x,s) := \frac{1}{2}\theta(s)U(x+s/2) + I(x,s) \tag{4.14}$$

とおけば

$$\big(\mathcal{F}_{\kappa\to s}(L-1)\big)(x,s) = N(x,s)$$

となる．とくに(4.13) から

$$N(x,0) = \frac{1}{2}U(x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty u(y)dy$$

がわかり，N が x に関して微分可能ならば

$$u(x) = -2N_x(x,0) \tag{4.15}$$

となる．さらに，任意の $\kappa \in \mathbf{R}$ について $L(x,-\kappa) = \overline{L(x,\kappa)}$ が成り立つことに注意すれば，$N(x,s)$ は実数値関数であることもわかる．以上のことをまとめて，

定理 4.7. $u(x)$ は $GC(1)$ を満たすとする．このとき

$$L(x,\kappa) = 1 + \int_0^\infty N(x,s)e^{i\kappa s}ds$$

と書ける．ここで $N(x,s)$ は(4.14) で定義される実数値関数である．また，$N(x,s)$ は x, s に関して微分可能であり，

$$N, N_x, N_s \in C_0(\mathbf{R}\times[0,\infty)) := \{f \in C(\mathbf{R}\times[0,\infty))\,;\ {}^\forall x \in \mathbf{R},\ \lim_{s\to\infty} f(x,s) = 0\}$$

を満たす．

4.5 Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程式

準備が整ったところで Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程式を導こう．定理 4.5 により，$u(x)$ が $GC(1)$ を満たすなら，固有値の数は有限個である．これらを $-\nu_1 < -\nu_2 < \cdots < -\nu_N < 0$ とし，$\kappa_n = \sqrt{\nu_n}$, $1 \le n \le N$ と書くことにする．

$$B_d(z) := \sum_{n=1}^N C_n^2 e^{-\kappa_n z}, \qquad B_c(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}_{\kappa\to z} b_r(z)$$

とおく．ここで C_n は規格化定数，$b_r(\kappa)$ は反射係数である．

$$\begin{aligned} B(z) &:= B_d(z) + B_c(z) \\ &= \sum_{n=1}^N C_n^2 e^{-\kappa_n z} + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{i\kappa z} b_r(\kappa)d\kappa, \qquad z \ge 0 \end{aligned}$$

とおく．

定理 4.8. $u(x)$ は $GC(2)$ を満たすとする．このとき(4.14) で定義される実数値関数 $N(x,s)$ は次の方程式を満たす．

$$B(2x+s)+N(x,s)+\int_0^\infty N(x,t)B(2x+s+t)dt=0, \qquad x\in\mathbf{R}, \quad s\geq 0.$$

証明：$a_r(\kappa)=1/r_-(\kappa)$, $b_r(\kappa)=r_+(\kappa)/r_-(\kappa)$ とおけば(4.7) 式より等式

$$a_r(\kappa)\phi_r(x,\kappa)=b_r(\kappa)\phi_l(x,\kappa)+\overline{\phi_l}(x,\kappa)$$

を得る．$\phi_r=Re^{-i\kappa x}$, $\phi_l=Le^{i\kappa x}$ をそれぞれ代入すれば

$$a_r(\kappa)R(x,\kappa)=b_r(\kappa)L(x,\kappa)e^{2i\kappa x}+\overline{L}(x,\kappa)$$

となる．この式の左辺に定理 4.7 で得た L の Fourier 変換による表示式

$$L(x,\kappa)=1+\sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}_{s\to\kappa}N(x,\kappa)$$

を代入，N が実数値であることから $\overline{\mathcal{F}^{-1}_{s\to\kappa}N}=\mathcal{F}_{\kappa\to s}N$ に注意すれば

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(a_rR-1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}b_r(\kappa)e^{2i\kappa x}+b_r(\kappa)e^{2i\kappa x}\mathcal{F}^{-1}_{s\to\kappa}N+\mathcal{F}_{\kappa\to s}N$$

となる．両辺に逆 Fourier 変換を作用させれば

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}_{\kappa\to s}(a_rR-1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}_{\kappa\to s}(b_re^{2i\kappa x})+\mathcal{F}^{-1}_{\kappa\to s}(b_re^{2i\kappa x}\mathcal{F}^{-1}N)+N \tag{4.16}$$

を得る．右辺第一項と第二項は Fourier 変換の定義から

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}_{\kappa\to s}(b_re^{2i\kappa x})&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}e^{i(s+2x)\kappa}b_r(\kappa)d\kappa\\&=B_c(2x+s)\end{aligned} \tag{4.17}$$

また，同様の計算により

$$\mathcal{F}^{-1}_{\kappa\to s}(b_re^{2i\kappa x}\mathcal{F}^{-1}_{t\to\kappa}N)=\int_0^\infty N(x,t)B_c(s+t+2x)dt \tag{4.18}$$

がわかる．[*1]

(4.16) の左辺については，

$$Q(x,s):=(4.16)\text{ の左辺}$$
$$Q_\varepsilon(x,s):=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\frac{e^{i\kappa s}}{1-i\varepsilon\kappa}a_r(\kappa)(R(x,\kappa)-1)d\kappa, \qquad \varepsilon>0$$

とおく．定理 4.2 より R は $\mathbf{C}_+$ 上解析的であり，$a_r(\kappa)=1/r_-(\kappa)$ は定理 4.4, 定理 4.5 から有限個の一位の極を $\mathbf{C}_+$ 上に持つ．さらに $u(x)$ が $GC(2)$ を満たすことから R, a_r は $\kappa=0$ で連続と

[*1] 実際の証明は $b^\varepsilon(\kappa)=e^{-\varepsilon\kappa^2}b_r(\kappa)\in L^1\cap L^2$ とし b^ε に対して同様の計算を行い $\varepsilon\to 0$ とするのである．

なる．従って積分路 Ω_R を $[-R,R]$ と $C_R := \{z\,;\,|z|=R,\ \mathrm{Im}\,z \geq 0\}$ から成るものをとれば，留数定理により

$$
\begin{aligned}
Q_\varepsilon(x,s) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_R} \frac{e^{i\kappa s}}{1-i\varepsilon\kappa} a_r(\kappa)(R(x,\kappa)-1)d\kappa \\
&= i \sum_{n=1}^{N} \frac{R(x,i\sqrt{\nu_n})}{\frac{dr_-}{d\kappa}(i\sqrt{\nu_n})} (1+\varepsilon\sqrt{\nu_n})^{-1} e^{-\sqrt{\nu_n}s}
\end{aligned}
$$

となり，$\varepsilon \to 0$ とすれば

$$
Q(x,s) = i \sum_{n=1}^{N} \frac{R(x,i\sqrt{\nu_n})}{\frac{dr_-}{d\kappa}(i\sqrt{\nu_n})} e^{-\kappa_n s}. \tag{4.19}
$$

系 4.1 と定理 4.5, 定理 4.6 により

$$
\begin{aligned}
&\frac{dr_-}{d\kappa}(i\sqrt{\nu_n}) = \frac{1}{iC_n} \|\phi_r(\cdot, i\sqrt{\nu_n})\| \\
&R(x,i\sqrt{\nu_n}) = C_n \|\phi_r(\cdot, i\sqrt{\nu_n})\| L(x,i\sqrt{\nu_n}) e^{-2\kappa_n x}
\end{aligned}
$$

であるから，これらを(4.19) へ代入すると

$$
Q(x,s) = -\sum_{n=1}^{N} C_n^2 L(x,i\sqrt{\nu_n}) e^{-\kappa_n(s+2x)}
$$

となる．この式に定理 4.7 で得た L の表示式を代入すれば

$$
Q(x,s) = -B_d(2x+s) - \int_0^\infty N(x,t) B_d(2x+s+t)dt \tag{4.20}
$$

が得られる． (4.16) に(4.17), (4.18), (4.20) を代入すれば，示すべき $N(x,s)$ が満たす方程式が得られる．

□

参考文献

[1] M. J. Ablowitz, D. BarYaacov and A. S. Fokas, On the inverse sccattering transform for the Kadomtsev-Petviashvili equations, *Stud. Appl. Math* **69**, (1983) 135-142.

[2] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson, Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[3] M. J. Ablowitz and R. Haberman, Resonantly coupled nonlinear evolution equations, *J. Math. Phys* **16**, (1975) 2301-2305.

[4] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup and A. C. Newell, Coherent pulse propagation, a dispersive, irreversible phenomenon, *J. Math. Phys* **15**, (1974) 1852-1858.

[5] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, Method for solving the Sine-Gordon equation, *Phys. Rev. Lett* **30**, (1973) 1262-1264.

[6] M. J. ablowitz and H. Segur, "Solitons and the Inverse Scattering Transform", SIAM, Philadelphia.

[7] M. Antonowicz and A. P. Fordy, Coupled KdV equations with multi-Hamiltonian structures, *Physica* **28D**, (1987) 345-357.

[8] M. Antonowicz and A.P. Fordy, Super-extensions of energy dependent Schrödinger operators, *Commun. Math. Phys* **124**, (1989) 487-500.

[9] T. B. Benjamin, *J. Fluid Mech* **25**, (1966) 241.

[10] T. B. Benjamin, *J. Fluid Mech* **29**, (1967) 559.

[11] F. Calogero and A. Degasperis, Solution by the spectral transform method of a nonlinear evolution equation including as a special case the cylindrical KdV equation, *Lett. Nuovo Cim* **23**, (1978) 150-154.

[12] F. Calogero and A. Degasperis, Reduction technique for matrix nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform, *J. Math. Phys* **22**, (1981) 23-31.

[13] P. J. Caudrey, R. K. Dodd and J. D. Gibbon, A new hierarchy of Korteweg-de Vries equations, *Proc. Roy. Soc. London A* **351**, (1976) 407-422.

[14] A. Cohen, Existence and regularity for solutions of the Korteweg-de Vries equation. *Arch. Rat. Mech. Anal* **71**, Number 2, (1979) 143-175.

[15] R. E. Davis and A. Acrivos, *J. Fluid Mech* **29**, (1967) 593.

[16] V. G. Drinfel'd and V. V. Sokolov, Equations of KdV type and simple Lie algebras, *Sov. Math. Dokl* **23**, (1981) 457-462.

[17] W. Eckhaus and A. Van Harten, The Inverse Scattering Transformation and the Theory of Solitons. An Introduction. North-Holland Mathematics Studies, 50. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981.

[18] J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey and R. K. Bullough, Solitons in nonlinear optics. I. A more accurate description of the 2 π-pulse in self-induced transparency, *J. Phys. A: Math. Gen* **6**, (1973) 1337-1347.

[19] L. B. Faddeev, The inverse problem in the quantum theory of scattering, *Uspekki Mat. Nauk* **14**, (1959) 57-119. *J. Math. Phys* **4**, (1963) 72-104.

[20] A. S. Fokas, A symmetry approach to exactly solvable evolution equation, *J. Math. Phys* **21**, (1980) 1318-1325.

[21] A. S. Fokas and M. J. Ablowitz, On the inverse scattering and direct linearizing transforms for the Kadomtsev-Petviashvili equation, *Phys. Lett* **94A**, (1983) 67-70.

[22] A. S. Fokas and M. J. Ablowitz, On the inverse scattering of the time-dependent Schrödinger equation and the associated Kadomtsev-Petviashvili (I) equation, *Stud. Appl. Math* **69**, (1983) 211-228.

[23] A. P. Fordy, Derivative nonlinear Schrödinger equations and Hermitian symmetric spaces, *J. Phys. A: Math, Gen* **17**, (1984) 1235-1245.

[24] A. P. Fordy and J. Gibbons, Integrable nonlinear Klein-Gordon equations and Toda Lattices, *Commun. Math. Phys* **77**, (1980) 21-30.

[25] A. P. Fordy and P. P. Kulish, Nonlinear Schrödinger equations and simple Lie algebras, *Commun. Math. Phys* **89**, (1983) 427-433.

[26] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett* **19**, (1967) 1095-1097.

[27] I. M. Gel'fand and B. M. Levitan, On the determination of a differential equation from its spectral functions, *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2* **1**, (1955) 253-304.

[28] J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, R. K. Bullough and J. C. Eilbeck, An N-soliton solution of a nonlinear optics equation derived by a general inverse scattering method, *Lett. Nuovo Cim* **8**, (1973) 775-779.

[29] R. Hirota and J. Satsuma, Soliton solutions of a coupled Korteweg-de Vries equation, *Phys. Lett* **85**, (1981) 407-408.

[30] 磯崎洋, 量子力学的散乱理論における逆問題, 数学５０巻２号, 岩波書店, 1998.

[31] M. Ito, Symmetries and conservation laws of a coupled nonlinear wave equation, *Phys. Lett* **91A**, (1982) 335-338.

[32] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili, *Sov. Phys. Dokl* **15**, (1970) 539.

[33] T. Kawahara, *J. Phys. Soc. Japan* **33**, (1972) 260.

[34] 川原琢治, ソリトンからカオスへ ―非線形発展方程式の世界―, 朝倉書店, 1993.

[35] D. J. Kaup, A higher-order water-wave equation and the method for solving it, *Prog. Theo. Phys* **54**, (1975) 396-408.

[36] D. J. Kaup, The three-wave interaction — a nondispersive phenomenon, *Stud. Appl. Math* **55**, (1976) 9-44.

[37] D. J. Kaup, On the inverse scattering problem for the cubic eigenvalue problem of the class $\phi_{xxx} + 6Q\phi_x + 6R\phi = \lambda\phi$, *Stud. Appl. Math* **62**, (1980) 189-216.

[38] D. J. Kaup and A. C. Newell, An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation, *J. Math. Phys* **19**, (1978) 798-801.

[39] M. Kruskal, The Korteweg-de Vries equation and related evolution equation, in "Non-

linear Wave Motion", proceedings, Potsdam, New York, 1972, ed. A. C. Newell, *Lect. Appl. Math* **15** (1974) 61-83, A.M.S., Providence, RI.

[40] B. A. Kuperschmidt, A super KdV equation: an integrable system, *Phys. Lett* **102A**, (1984) 213-215.

[41] B. A. Kuperschmidt, Mathematics of dispersive water waves, *Commun. Math. Phys* **99**, (1985) 51-73.

[42] M. Lakshmanan, Continuum spin system as an exactly solvable dynamical system, *Phys. Lett* **61A**, (1977) 53-54.

[43] G. L. Lamb, Phase variation in coherent-optical-pulse propagation, *Phys. Rev. Lett* **31**, (1973) 196-199.

[44] P. D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure App. Math* **21**, (1968) 467-490.

[45] G. P. Leclert, C. F. F. Karney, A. Bers and D. J. Kaup, Two-dimensional self modulation of lower hybrid waves in inhomogeneous plasmas, *Phys. Fluids* **22**, (1979) 1545-1553.

[46] F. Lund and T. Regge, Unified approach to strings and vorices with soliton solutions, *Phys. Rev* **D14**, (1976) 1524-1535.

[47] V. A. Marchenko, On reconstruction of the potential energy from phases of the scattered waves (Russian), *Dakl. Akad, Nauk SSSR (N.S.)* **104**, (1955) 695-698.

[48] S. V. Manakov, Complete integrability and stochastization of discrete dynamical systems, *Sov. Phys. JETP* **40**, (1975) 269-274.

[49] S. V. Manakov, The inverse scattering transform for the time-dependent Schrödinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation, *Physica* **3D**, (1981) 420-427.

[50] A. V. Mikhailov, Integrability of a two-dimensional generalization of the Toda chain, *Sov. Phys. JETP Lett* **30**, (1979) 414-418.

[51] A. V. Mikhailov, The reduction problem and the inverse scattering method, *Physica* **3D**, (1981) 73-117.

[52] A. V. Mikhailov, The Landau-Lifschitz equation and the Riemann boundary value problem on a torus, *Phys. Lett* **92A**, (1982) 51-55.

[53] H. Nagashima, *Phys. Lett* **105A**, (1984) 439.

[54] A. C. Newell, The general structure of integrable evolution equations, *Proc. Roy. Soc. London A* **365**, (1978) 283-311.

[55] H. Ono, *J. Phys. Soc. Japan* **39**, (1975) 1082.

[56] K. Pohlmeyer, Integrable Hamiltonian systems and intractions through quadratic constants, *Commun. Math. Phys* **46**, (1976) 207-221.

[57] G. R. W. Quispel, F. W. Nijhoff and H. W. Capel, Linearization of the Boussinesq equation and the modified Boussinesq equation, *Phys. Lett* **91A**, (1982) 143-145.

[58] Yu. L. Rodin, The Riemann boundary problem in Riemann surfaces and the inverse scattering problem for the Landau-Lifshitz equation, *Physica* **11D**, (1984) 90-108.

[59] Yu. L. Rodin, The Riemann boundary value problem on closed Riemann surfaces and integrable systems, *Physica* **24D**, (1987) 1-53.

[60] S. Sawada and T. Kotera, A method for finding N-soliton solution of the KdV and KdV-like equations, *Prog. Theo. Phys.* **51**, (1974) 1355-1367.

[61] H. Segur, Comments on IS for the Kadomtsev-Petviashvili equation, in " *Mathematical Methods in Hydrodynamics and Integrability in Dynamical Systems,"* Proceedings, La Jolla 1981, eds. M. Tabor and Y. M. Treve, AIP Conf. Proc., **88**, 221-228.

[62] E. K. Sklyanin, On complete integrability of the Landau-Lifschitz equation, *preprint LOMI*, (1979) E-3-79, Leningrad.

[63] S. I. Svinolupov and V. V. Sokolov, Evolution equations with nontrivial conservation laws, *Func. Anal. Appl* **16**, (1983) 317-319.

[64] S. I. Svinolupov, V. V. Sokolov and R. I. Yamiov, On Bäcklund transformations for integrable evolution equations, *Soviet Math. Dokl* **28**, (1983) 165-168.

[65] L. A. Takhtajan, Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method, *Phys. Lett* **64A**, (1977) 235-237.

[66] 和達三樹, 非線形波動，現代物理学叢書，岩波書店，2000.

[67] M. Wadati, The modified Korteweg-de Vries equation, *J. Phys. Soc. Japan* **32**, (1972) 1681.

[68] M. Wadati, K. Konno and Y.-H. Ichikawa, New integrable nonlinear evolution equations, *J. Phys. Soc. Japan*, (1979) 1698-1700.

[69] G. Wilson, The affine Lie algebra $C_2^{(1)}$ and an equation of Hirota and Satsuma, *Phys. Lett* **89A**, (1982) 332-334.

[70] N. Yajima and M. Oikawa, Formation and interaction of sonic-Langmuir solitons — inverse scattering method, *Prog. Theo. Phys* **56**, (1976) 1719-1739.

[71] V. E. Zakharov, On stochastization of one-dimensional chains of nonliear osillations, *Sov. Phys. JETP* **38**, (1974) 108-110.

[72] V. E. Zakharov and S. V. Manakov, Resonant interaction of wave packets in nonlinear media, *Sov. Phys. JETP Lett* **18**, (1973) 243-235.

[73] V. E. Zakharov and S. V. Manakov, The theory of resonance interaction of wave packets in nonliear media, *Sov. Phys. JETP* **42**, (1976) 842-850.

[74] V. E. Zakharov and E. I. Schulman, To the integrability of the system of two coupled nonlinear Schrödinger equations, *Physica* **4D**, (1982) 270-274.

[75] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional of waves in nonlinear media, *Sov. Phys. JETP* **34**, (1972) 62-69.